

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ХОРД.

Садиева Д. А., студент
 Бигаева Л.А., доцент, к.ф.-м.н.
 БФ УУНиТ, Бирск

Аннотация. Решение уравнений — одна из важнейших математических задач. Оно является необходимым элементом решения задач большинства приложений математики.

В статье рассматривается численное решение нелинейных уравнений методом хорд.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, метод хорд, метод последовательных приближений, неподвижная точка, итерация.

Метод хорд уточнения корней уравнений относится к методам последовательных приближений[1,2]. Приближения к корню находятся так: если известно предыдущее приближение x_k ($k=0,1,2,\dots$), то последующее приближение x_{k+1} , вычисляется по формуле

$$x_{k+1} = G(x_k)$$

где $G(x)$ — некоторое выражение, устанавливающее связь между предыдущим и последующим приближениями. Начинается процесс с какого-либо числа x_0 из отрезка изоляции корня — начального приближения.

Формула данного вида называется рекуррентной формулой, а получаемую с ее помощью последовательность приближений называют итерационной последовательностью[1,2].

Итак, пусть дано уравнение: $f(x) = 0$, корень t которого отделен на отрезке $[a, b]$.

Из курса математического анализа известно, что при $f'(x) > 0$ на $[a, b]$ функция возрастает на этом отрезке; при $f'(x) < 0$ — убывает; при $f''(x) > 0$ график функции вогнутый, а при $f''(x) < 0$ — выпуклый. Возможны четыре случая:

1. $f' > 0, f'' > 0$ — функция возрастает, график вогнутый;
2. $f' < 0, f'' < 0$ — функция убывает, график выпуклый;
3. $f' > 0, f'' < 0$ — функция возрастает, график выпуклый;
4. $f' < 0, f'' > 0$ — функция убывает, график вогнутый.

От того, какой из случаев имеет место, зависят рекуррентная формула и правило выбора начального приближения x_0 . Поэтому при уточнении корня будем полагать, что функция f имеет непрерывные производные f' и f'' с отличными от нуля и сохраняющими постоянный знак значениями при всех

$x \in [a, b]$. Для выполнения приведенных условий иногда приходится сужать первоначально найденные отрезки изоляции корня.

Алгоритм решения:

Пусть $k=0$.

Следующий номер итерации $k=k+1$. Очевидное приближение корня

определяется по формуле $x_k = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$. Далее вычисляется $f(x_k)$.

Если $f(x_k) = 0$, то перейти к п.5. Если $f(x_k)f(b) > 0$, то $b = x_k$, иначе $a = x_k$.

Если $|x_k - x_{k-1}| > \varepsilon$, то перейти к п.2.

Вывести значение корня x_k [1].

Рассмотрим пример.

$$F(x) = 5x^2 - 2 \lg(|x| + 0,5) - 2 = 0$$

Необходимо уточнить корни уравнения методом хорд с точностью $\varepsilon=0,0001$.

Решение задачи.

Решение указанной задачи в достаточно общем случае начинается с отделения корней, т.е. с установления количества корней; наиболее «тесных» промежутков, каждый из которых содержит только один корень.

Применим графический способ отделения корней. Для этого построим график функции (рис.1).

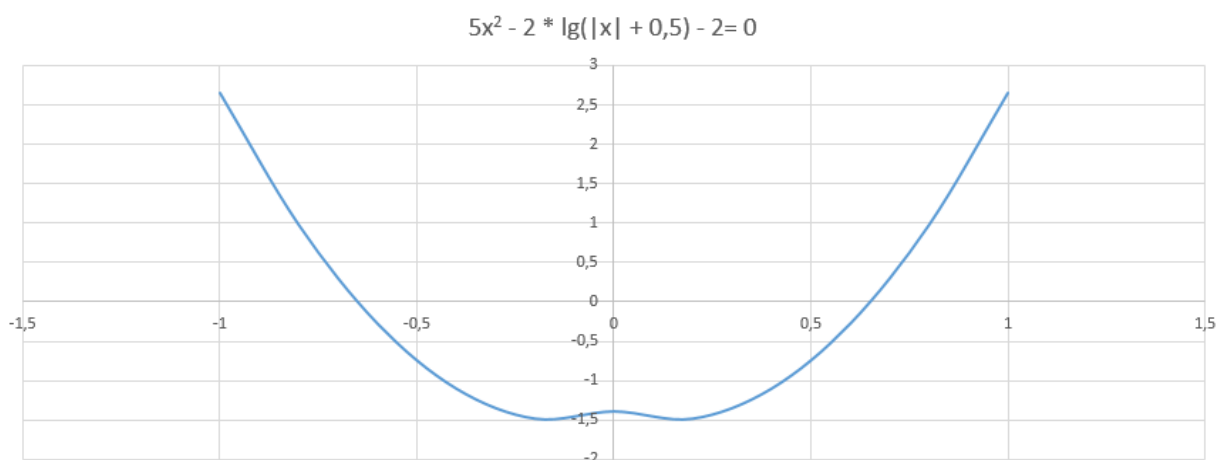


Рисунок 1. График функции $F(x) = 5x^2 - 2 \lg(|x| + 0,5) - 2$.

На рисунке видно, что уравнение имеет 2 корня. Так как функция четная, достаточно уточнить 1 корень. Выделим отрезок $[-0,7; -0,5]$, где находится первый корень, и уточним его методом хорд. Определим знаки первой и второй производной функции. Так как $F'(x) \cdot F''(x) < 0$, то $b = x_0 = -0,5$ — начальная точка, $a = x = -0,7$ — неподвижная точка,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a - x_n}{F(a) - F(x_n)} \cdot F(x_n)$$

$$h_n = \frac{F(a)}{F(x_n) - F(a)} (x_n - a), \Delta h = h_{n+1} - h_n \cdot \Delta x = x_{n+1} - x_n$$

Все результаты сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Результаты вычислений

a	b	F(a)				
-0,7	-0,5	0,29163751				
x	y	$x_n - a$	h_n	Δh	Δx	Условие
-0,50000000	-0,75000000	0,20000000	-0,05599597			Нет
-0,64400403	-0,04314915	0,05599597	-0,04877890	0,00721707	0,14400403	Нет
-0,65122110	-0,00187288	0,04877890	-0,04846764	0,00031126	0,00721707	Нет
-0,65153236	-0,00008024	0,04846764	-0,04845431	0,00001333	0,00031126	Да
-0,65154569	-0,00000344	0,04845431	-0,04845374	0,00000057	0,00001333	Да
-0,65154626	-0,00000015	0,04845374	-0,04845372	0,00000002	0,00000057	Да

Как видно из таблицы значение 1го корня с точностью $\varepsilon=0,0001$: $x_1=-0,6515$, тогда $x_2=0,6515$.

Также составлена программа на языке Python.

```
import math
print("5x^2-2lg(|x|+0,5)-2=0")
def F(x):
    return 5*x**2-2*math.log10(abs(x)+0.5)-2
def F_1(x):
    return 10*x-4*x/(math.log(10, math.e)*((2*abs(x)+1)*abs(x)))
def F_2(x):
    return 10+8/(math.log(10, math.e)*(2*abs(x)+1)**2)
a=[-0.7, 0.5]
b=[-0.5, 0.7]
e=0.0001
for i in range(len(a)):
    if (F_1(a[i])*F_2(a[i])<0):
        x0=b[i]
        xn=a[i]
    else:
        x0=a[i]
        xn=b[i]
    if (abs(F_1(a[i]))<abs(F_1(b[i]))):
        min=abs(F_1(a[i]))
    else:
        min=abs(F_1(b[i]))
    while True:
        x1=x0-(xn-x0)/(F(xn)-F(x0))*F(x0)
```

```

x0=x1
if (abs(F(x1)) /min<e):
    break
print("X"+str(i) +" = "+str(round(x1, 8)) +"+"+"-"+str(format(abs(F(x1)) /min, '.8f'))))

```

Протокол работы программы:

$$5x^2 - 2\lg(|x| + 0,5) - 2 = 0$$

$$X_0 = -0.65153236 + -0.00001942$$

$$X_1 = 0.65153236 + -0.00001942$$

Заключение.

Метод хорд представляет собой простой и эффективный способ нахождения решений нелинейных уравнений. Данный метод достаточно легко реализуется на Python. Преимуществом метода является простота реализации и надежность, особенно при наличии хорошего выбора начальных приближений. Однако важно помнить, что выбор начальных точек существенно влияет на скорость сходимости метода.

Литература

1. Бигаева, Л. А. Курс лекций по численным методам : Учебное пособие для студентов физико-математического факультета / Л. А. Бигаева, И. И. Латыпов. – Издание правленое и дополненное. – Бирск : Бирский филиал Башкирского государственного университета, 2019. – 139 с. – ISBN 978-5-86607-476-5. – EDN KWOELH.

2. Лапчик М. П. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; Под ред. М. П. Лапчика. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 384 с.

Sadieva D. A., Bigaeva L.A.

SOLVING NONLINEAR EQUATIONS. THE CHORD METHOD.

Sadieva D. A. student of the BF Unit, sadievadiana@gmail.com

Bigaeva Lyuziya Akhatovna, Associate Professor, Ph.D.

Annotation. Solving equations is one of the most important mathematical tasks. It is a necessary element of solving problems in most applications of mathematics.

The article discusses the numerical solution of nonlinear equations by the chord method.

Keywords. Nonlinear equations, chord method, method of successive approximations, fixed point, iteration.